ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ KIM ANH

PHƯƠNG PHÁP PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ CHỨNG MINH CÁC HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ KIM ANH

PHƯƠNG PHÁP PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ CHỨNG MINH CÁC HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 8460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS.TS. Tạ Duy Phượng

THÁI NGUYÊN - 2018

Mục lục

Mở đầu

1. Lí do chọn đề tài

Xét ba bài toán sau đây.

Bài toán 1 (Olympic Moskva, 1939, vòng 1) Chứng minh rằng

$$\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{2}. \tag{1}$$

Bài toán 2 (Vô địch Quốc tế lần thứ 5, 1963) Chứng minh rằng

$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}. \tag{2}$$

Bài toán 3 (THTT, tháng 10, số 232, năm 1996) $\tan\frac{\pi}{8}, \tan\frac{3\pi}{8}, \tan\frac{5\pi}{8}, \tan\frac{7\pi}{8}$ là các nghiệm của phương trình

$$t^4-6t^2+1=0. \tag{3}$$

Hai hệ thức (1) và (2) có thể dễ dàng chứng minh nhờ phép biến đổi lượng giác. Tuy nhiên, từ hai hệ thức này ta khó có thể phát hiện thêm những hệ thức tương tự. Mặt khác, có thể dễ dàng chứng minh rằng (xem Mệnh đề 1.3.1) $\cos\frac{2\pi}{5}, \cos\frac{4\pi}{5}$ là các nghiệm của phương trình $t^2+\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}=0$. Tương tự (xem Mệnh đề 2.4.1), $\cos\frac{\pi}{7}, \cos\frac{3\pi}{7}, \cos\frac{5\pi}{7}$ là nghiệm của phương trình $t^3-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}=0$ và bài toán 3 đã được chứng minh trong Mệnh đề 3.3.1. Từ tính chất nghiệm của phương trình bậc hai và bậc ba, ta suy ra ngay các hệ thức (1) và (2) (xem các Hệ thức 1.3.1 và 2.4.1b). Từ tính chất nghiệm của phương trình bậc hai, bậc ba và bậc bốn, ta có thể dễ dàng phát hiện và chứng minh khá

nhiều hệ thức lượng giác chứa các góc $\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}$ hoặc $\frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}$ hay $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$ mà không cần sử dụng các phép biến đổi lượng giác. Đó chính là ý tưởng cơ bản và chủ đạo của luận văn này.
Sử dụng các tính chất nghiệm của phương trình bậc ba để phát hiện và chứng minh các hệ thức (hình học và lượng giác) trong tam giác có lẽ lần đầu tiên được trình bày trong [6] và được phát triển trong [1]. Phát hiện và chứng minh các hệ thức lượng giác nhờ sử dụng các tính chất nghiệm của phương trình bậc bốn có lẽ lần đầu tiên được trình bày một cách hệ thống trong [2] và [3].

Như vậy, ta có một nhịp cầu nối Đại số (phương trình và hàm số) với Lượng giác (các hệ thức của hàm số lượng giác có liên quan đặc biệt). Đây chính là điểm mới và khác biệt của luận văn này so với các luận văn đã có về hệ thức lượng giác. Ý tưởng sử dụng các tính chất nghiệm của phương trình đại số để phát hiện và chứng minh các hệ thức lượng giác có lẽ lần đầu tiên được trình bày một cách hệ thống trong [3].

2. Lịch sử nghiên cứu

Chủ đề hệ thức lượng giác có vị trí và vai trò quan trọng trong chương trình môn Toán ở trường Trung học phổ thông. Đã có khá nhiều tài liệu viết về chủ đề hệ thức lượng giác. Tuy nhiên theo quan sát của chúng tôi chưa có nhiều tài liệu hay đề tài luận văn cao học phân tích sâu về hệ thức lượng giác.

3. Mục đích, đối tượng, phạm vi nguyên cứu

Luận văn có mục đích trình bày phương pháp phương trình đại số chứng minh các hệ thức lượng giác.
Đối tượng, phạm vi nghiên cứu là hệ thức lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt.

4. Mục tiêu của luận văn

Trình bày phương pháp phương trình đại số để phát hiện và chứng minh các hệ thức lượng giác mới.
Ngoài ra nhằm so sánh phương pháp phương trình đại số với phương pháp chứng minh thông thường (nhờ biến đổi lượng giác), ở một số bài, luận văn cũng trình bày cả các kĩ thuật chứng minh truyền thống.

5. Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng công cụ phương trình đại số để nghiên cứu hệ thức lượng giác.

6. Nội dung của luận văn

Ngoài phần mở đầu, Kết luận và Tài liệu tham khảo. Luận văn gồm ba chương.
Chương 1. Phương pháp phương trình bậc hai chứng minh các hệ thức lượng giác.
Đầu Chương 1 trình bày một số tính chất nghiệm của phương trình bậc hai, sau đó xây dựng các phương trình bậc hai mới từ các phương trình bậc hai đã có. Từ đó đưa ra các phương trình bậc hai có nghiệm liên quan đến giá trị lượng giác của các góc đặc biệt rồi đưa ra rất nhiều hệ thức lượng giác.
Chương 2. Phương pháp phương trình bậc ba chứng minh các hệ thức lượng giác.
Đầu Chương 2 trình bày một số tính chất nghiệm của phương trình bậc ba, sau đó xây dựng các phương trình bậc ba mới từ các phương trình bậc ba đã có. Từ đó đưa ra các phương trình bậc ba có nghiệm liên quan đến giá trị lượng giác của các góc đặc biệt rồi đưa ra rất nhiều hệ thức lượng giác.
Chương 3. Phương pháp phương trình bậc bốn chứng minh các hệ thức lượng giác.

Đầu Chương 3 trình bày một số tính chất nghiệm của phương trình bậc bốn, sau đó xây dựng các phương trình bậc bốn mới từ các phương trình bậc bốn đã có. Từ đó đưa ra các phương trình bậc bốn có nghiệm liên quan đến giá trị lượng giác của các góc đặc biệt, từ đó phát biểu và chứng minh rất nhiều hệ thức lượng giác mới.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên.

Lời đầu tiên tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sau sắc đến thầy giáo PGS. TS. Tạ Duy Phượng. Thầy đã định hướng chọn đề tài và nhiệt tình hướng dẫn cũng như giải đáp mọi thắc mắc của tôi trong suốt quá trình làm luận văn để tôi hoàn thành luận văn này.

Tác giả xin chân thành cám ơn toàn thể thầy cô trong khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình hướng dẫn, truyền đạt kiến thức trong suốt thời gian học tập, thực hiện và hoàn thành luận văn.

Xin được cám ơn nhà trường THPT Quế Võ Số 1, tỉnh Bắc Ninh.

Xin được cám ơn sự giúp đỡ của bạn bè, người thân và các đồng nghiệp trong suốt thời gian học tập và hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2018

Tác giả

Nguyễn Thị Kim Anh

Chương 1

Phương pháp phương trình bậc hai chứng minh các hệ thức lượng giác

Chương này trình bày một số tính chất nghiệm của phương trình bậc hai và ứng dụng trong phát hiện, chứng minh các hệ thức lượng giác mới.

1.1. Các tính chất nghiệm của phương trình bậc hai

Mọi phương trình bậc hai đều đưa được về dạng

$$x^2 + ax + b = 0. \tag{1.1}$$

Phương trình (1.1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn các tính chất sau.

Tính chất 1.1.1.

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 = -a.$$

Tính chất 1.1.2.

$$\sigma_2 = x_1x_2 = b.$$

Từ hai tính chất cơ bản trên và sử dụng các tính chất đối xứng của nghiệm, ta suy ra rất nhiều tính chất khác của nghiệm phương trình bậc hai, rất có lợi cho nghiên cứu phương trình bậc hai và trong chứng minh các hệ thức lượng giác.

Tính chất 1.1.3.

$$x_1^2 + x_2^2 = a^2 - 2b.$$

Tính chất 1.1.4.

$$x_1^3 + x_2^3 = -a^3 + 3ab.$$

Tính chất 1.1.5.

$$x_1^4 + x_2^4 = a^4 - 4a^2b + 2b^2.$$

Tính chất 1.1.6.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{a}{b}.$$

Tính chất 1.1.7.

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{a^2 - 2b}{b^2}.$$

Tính chất 1.1.8.

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{-a^3 + 3ab}{b^3}.$$

Tính chất 1.1.9.

$$\frac{1}{x_1^4} + \frac{1}{x_2^4} = \frac{a^4 - 4a^2b + 2b^2}{b^4}.$$

Bổ đề (Công thức Newton) Tổng lũy thừa $S_k = x_1^k + x_2^k$ được tính theo công thức truy hồi

$$S_k = \sigma_1 S_{k-1} - \sigma_2 S_{k-2}.$$

Tính chất 1.1.10. (Công thức Waring) Tổng lũy thừa $S_k = x_1^k + x_2^k$ được tính theo công thức

$$S_k = k \sum_{m=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{(-1)^m (k-m-1)!}{m!(k-2m)!} \sigma_1^{k-2m} \sigma_2^m,$$

trong đó theo định nghĩa $0! = 1! = 1$ và $[x]$ là phần nguyên của x.

Các trường hợp riêng:

$$S_2 = 2\left(\frac{1}{2}\sigma_1^2 - \sigma_2\right) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

$$S_3 = 3\left(\frac{1}{3}\sigma_1^3 - \sigma_1\sigma_2\right) = \sigma_1\left(\sigma_1^2 - 3\sigma_2\right).$$

$$S_4 = 4\left(\frac{1}{4}\sigma_1^4 - \sigma_1^2\sigma_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2\right) = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2.$$